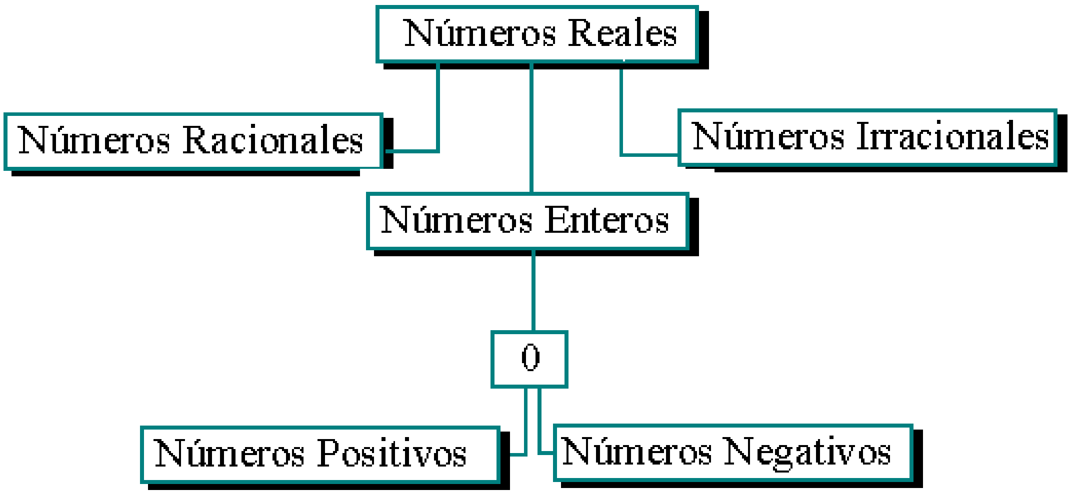
Precálculo

• Propiedades de los números reales

Los números que se utilizan en el álgebra son los números reales. Hay un número real en cada punto de la recta numérica. Los números reales se dividen en números racionales, números irracionales y numeros enteros los cuales a su vez se dividen en números negativos, números positivos y cero (0) .Podemos verlo en esta tabla:



Un número real es racionalsi se puede representar como cociente a/b, donde a sea un entero y b sea un entero no igual a cero. Los números racionales pueden escribirse en forma decimal. Existen dos maneras:

* decimales terminales

* decimales que se repiten infinitamente

Los números reales que no pueden ser expresados en la forma a/b, donde a y b son enteros se llaman números irracionales. Los números irracionales no tienen decimales terminales ni decimales que se repiten infinitamente.

• Desigualdades

Desigualdades Lineales

Una inecuación o desigualdad lineal es lo mismo que una ecuación lineal pero cambiando el signo de igualdad por signo(s) de desigualdad.

Los signos de desigualdad son $>$ (mayor que), $<$ (menor que), $\geq$ (mayor o igual que), y $\leq$ (menor o igual que) . Para resolver una desigualdad lineal se utilizan los mismos pasos que se usan para resolver una ecuación lineal. Como ejemplo, vamos a resolver la desigualdad 3 > x - 8.

Sumando la misma cantidad a ambos lados:

3 > x - 8

3 + 8 > x - 8 + 8

$11 > x$

Una regla importante en las desigualdades es que cuando se divide por un número negativo, el signo de desigualdad cambia.
Ejemplo:

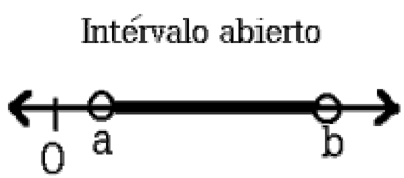
$$5x + 12 < 8x - 3$$
$$5x - 8x < -12 - 3$$
$$\frac{-3x}{-3} < \frac{-15}{-3}$$
$$x > 5$$

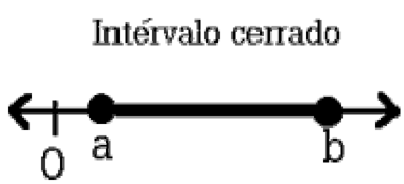
Intérvalos

Un intérvalo es el conjunto de todos los números reales entre dos números reales dados. Para representar los intérvalos se utilizan los siguientes simbolos:

1. Intérvalo abierto (a, b) = {x/a x b}.
2. Intérvalo cerrado [a, b] = {x/a $\leq$ x $\leq$ b}

En una gráfica, los puntos finales de un intérvalo abierto se representan con un punto abierto (○) y los de un intérvalo cerrado se representan con un punto cerrado (●). Por ejemplo, observemos las siguientes figuras:





Según vimos anteriormente los paréntesis se utilizan para los intérvalos abiertos y los corchetes para los intérvalos cerrados. Veamos ahora cuando se utilizan ambas denotaciones a la misma vez.
Por ejemplo:

Si tenemos (a, b], la gráfica sería:

Si tenemos [a, b), la gráfica sería:

Cuando hablamos de infinito nos referimos al conjunto de todos los números reales mayores que a y se representan con la notación de intérvalo (a, ∞). El conjunto de todos los números reales menores que a se representan con la notación de intérvalo (- ∞ , a).

Desigualdades que Envuelven Dos Posibles Soluciones

Hay desigualdades que envuelven dos posibles soluciones, una positiva y otra negativa. Por ejemplo:

$| 10x - 2| \geq 9$

- $10x - 2 \leq -9$
  $10x \leq -9 +2$
  $10x \leq -7$
  $10x/10 \leq -7/10$
  $x \leq -7/10$
- $10x - 2 \geq 9$
  $10x \geq 9 + 2$
  $10x \geq 11$
  $10x/10 \geq 11/10$
  $x \geq 11/10$

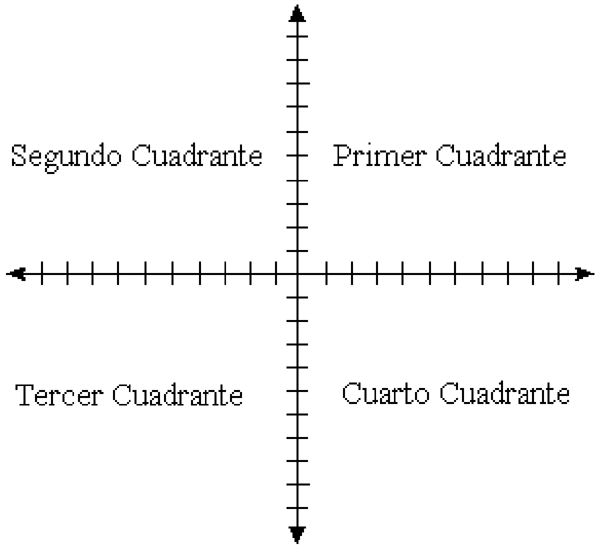
• Función y límite

Coordenadas

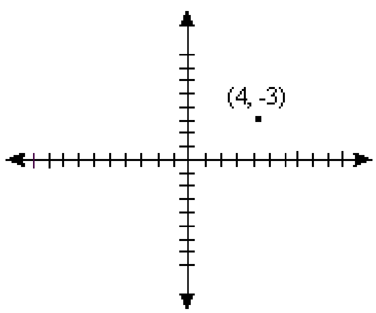
Llamamos a la coordenada de un punto a cada punto en la recta numérica asociado con un número real. Un par ordenado es un par de números a y b con elementos escritos en forma significante. Dos pares ordenados son iguales si tienen el mismo primer elemento y el mismo segundo elemento.
Por ejemplo:
El par ordenado (4, 5) es igual al par ordenado (4, 5).

Los números en un par ordenado son llamados coordenadas. En el par (7, 5) la primera coordenada es 7 y la segunda es 5.

Ya hemos visto en la primera sección cómo se construye una recta numérica. La línea horizontal es el eje de x, la vertical es el eje de y y su intersección es el origen. Estos ejes dividen el plano en cuatro zonas llamadas cuadrantes. Veamos la siguiente recta numérica:



Las coordenadas en el primer cuadrante serán (+, +), las del segundo cuadrante serán (-, +), las del tercer cuadrante serán (-, -) y las del cuarto cuadrante serán (+, -). El primer número de una coordenada representa el lugar horizontal del punto y el segundo número representa el lugar vertical del punto.
Por ejemplo:



Distancia Entre Dos Puntos

La distancia entre dos puntos P_1 y P_2 se calcula usando la siguiente fórmula:

$d(P_1, P_2) = |P_1 - P_2|$

Por ejemplo:

$d(4, -6) = |4 - (-6)| = 10$

Pero para hallar la distancia entre dos puntos, mediante sus coordenadas P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2), utilizamos la siguiente fórmula de distancia:

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(X_2 - X_1) + (Y_2 - Y_1)}}$$

Círculos

Un círculo es una curva que consiste en un conjunto de puntos equidistantes a un punto en común. El punto en común es llamado el centro del círculo y la distancia desde el centro hasta la curva se conoce como el radio del círculo.

Para determinar la distancia del radio (r), supongamos que las coordenadas del centro son (h, k) y las de un punto cualquiera del círculo son (x, y), la fórmula sería:

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

Por ejemplo, si el centro del círculo es (6, 4) y uno de sus puntos es (4, 3). Determinar el radio (r).

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$centro=(6,\ 4)$$
$$punto\ (4,\ 3)$$

$$(4-6)^2+(3-4)^2=r^2$$
$$(-2)^2+(-1)^2=r^2$$
$$4+1=r^2$$
$$5=r^2$$
$$\sqrt{5}=\sqrt{r^2}$$
$$r=\sqrt{5}$$

Si el centro del círculo es el origen, o sea con coordenadas (0, 0), entonces la fórmula sería:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Por ejemplo, si utilizamos el ejercicio anterior pero con centro (0, 0) sería:

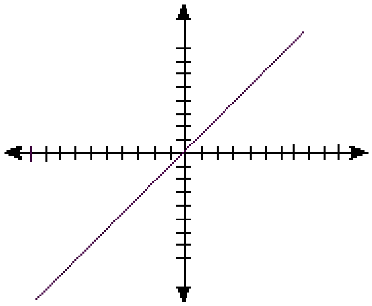
$$x^2+y^2=r^2$$
$$punto\ (4,\ 3)$$

$$4^2+3^2=r^2$$
$$16+9=r^2$$
$$25=r^2$$
$$\sqrt{25}=\sqrt{r^2}$$
$$r=5$$

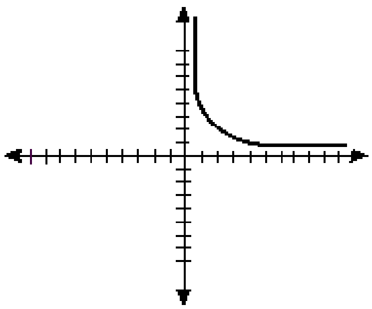
Variación

Existen dos tipos de variación: variación directa y variación inversa. Veamos cada una de ellas:

Variación Directa = es una función que se define por una ecuación que está en la forma y = kx , donde k es una constante no igual a cero. La variable y varía directamente de x. La constante k es llamada la constante de variación. La variación directa establece un único valor de y para cada valor de x. En la variación directa las dos variables aumentan (o disminuyen) juntas. Cuando el dominio es un conjunto de números reales, la gráfica de la variación directa es una línea recta con pendiente k que pasa por el origen.



Variación Inversa = es una función que se define por una ecuación que está en la forma y = k/x, donde x no es igual a cero. La variable y varía a la inversa de x. En la variación invesa el aumento de una de las variables significa la disminución de la otra variable. La gráfica de esta variación es una hipérbola.



Proporción

Una proporción es una ecuación que establece que dos radios son iguales. Una proporción es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en la que el producto entre a con d es igual al producto de b con c. Muchos problemas de aplicación pueden resolverse si se utiliza una proporción adecuada.

Por ejemplo:

Un automóvil gasta 9 galones de gasolina para viajar 120 millas. ¿Cuántos galones de gasolina necesitaría el auto para viajar 550 millas?

9 gal. = 120 mi.

x gal. = 550 mi.

$$\frac{9}{120} = \frac{x}{550}$$

$$120x = 9(550)$$

$$120x = 4950$$

$$x = 41.25$$

Funciones

Una función consiste en dos conjuntos, dominio y rango, y una regla que asigna a cada miembro del dominio exactamente un miembro del rango. A cada miembro del rango debe serle asignado por lo menos un miembro del dominio. Si la relación entre dos variables x y y es una en la que para cada valor de y hay exactamente un valor de x, se dice que y es una función de x.

Ejemplo:

$y = 7x + 1$

$y = 7(2) + 1 = 15$

$y = 7(4) + 1 = 29$

$y = 7(6) + 1 = 43$

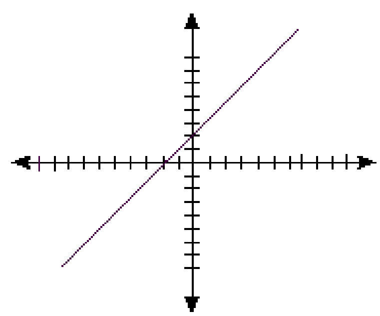
El dominio D es {2, 4, 6} y el rango R es {15, 29, 43}.

La Gráfica de una Función

Para hacer la gráfica de una función como $f(x) = x + 2$, lo hacemos igual que si hiciéramos la gráfica de una ecuación
$y = x + 2$. Buscamos los pares ordenados $(x, f(x))$, se localizan los puntos en la recta numérica y se conectan.
Por ejemplo:

$f(x) = x + 2$

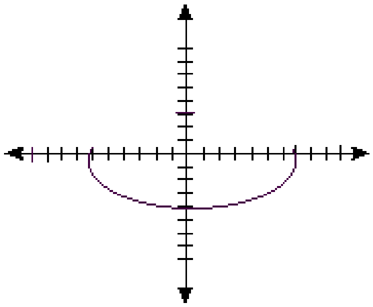
x	f(x)
-4	-2
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

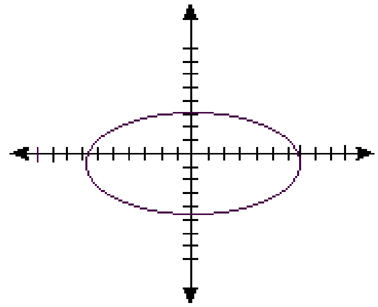


Utilizando una Gráfica para Definir una Función

Una gráfica determina un conjunto de pares ordenados con números reales correspondientes a las coordenadas de los puntos en la gráfica. Este conjunto de pares ordenados, determinados por la gráfica, puede o no puede definir una función. Es importante recordar que para definir una función, el conjunto de pares ordenados debe obedecer la regla que establece que dos pares ordenados no deben tener el mismo primer elemento. Por lo tanto, una línea vertical no puede intersectar la gráfica de una función en mas de un punto.

Figuras:



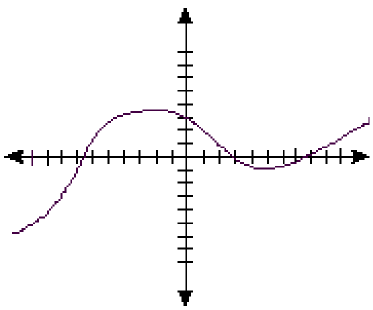


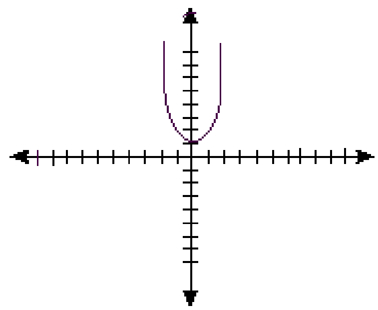
La figura 1 define una función, mientrás que la figura 2 no define una función.

Los Ceros de una Función

Un cero de una función es la solución de una ecuación f(x) = 0. Los ceros de una función corresponde a los puntos en los cuales la gráfica de la función atraviesa el eje de x. Estos puntos son llamados interceptos en x.

Por ejemplo:





En la figura 1 los interceptos en x son X_1, X_2 y X_3. La figura 2 no tiene ningún intercepto en x.